

# **Technische Universität Berlin**

Institut für Konstruktion, Mikro - und Medizintechnik

## **Fachgebiet Mikrotechnik**

**Prof. Dr. rer. nat. Heinz Lehr**

### **Integrierte Lehrveranstaltung**

### **Engineering Tools - Bachelor**

Übungseinheit

## **MAXWELL**

Sommersemester 2016

Übungsleiter:

**Oliver Mönnich, M. Sc.**

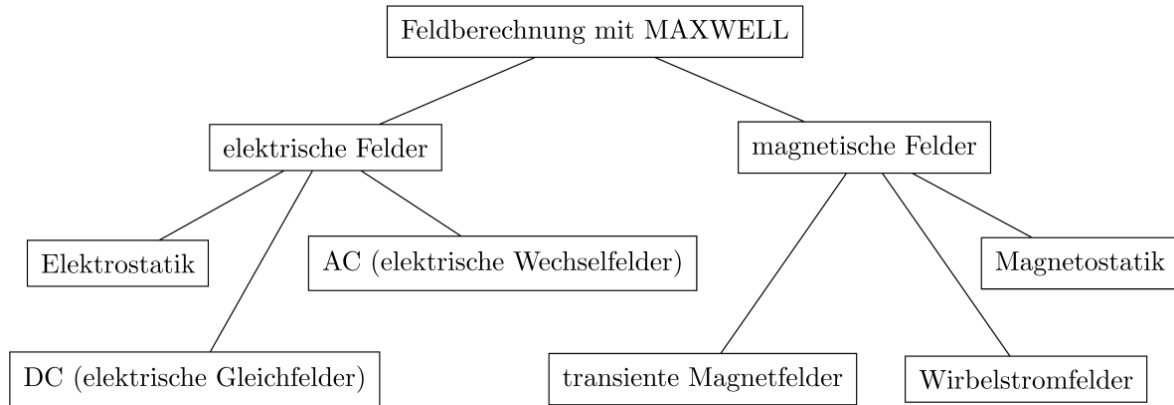
moennich@fmt.tu-berlin.de

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b> .....                               | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Finite-Elemente-Methode</b> .....                  | <b>3</b>  |
| 2.1      | Finite Elemente und adaptive Netzverfeinerung.....    | 4         |
| 2.2      | Schritte einer FEM-Berechnung .....                   | 5         |
| <b>3</b> | <b>Preprocessing</b> .....                            | <b>6</b>  |
| 3.1      | Koordinatensysteme.....                               | 6         |
| 3.2      | Erstellen der Geometrie .....                         | 7         |
| 3.3      | Materialzuweisung .....                               | 9         |
| 3.4      | Zuweisen von Lasten .....                             | 9         |
| 3.4.1    | Erstellen von Spulen in MAXWELL 3D .....              | 9         |
| 3.4.2    | Erstellen von Spulen in MAXWELL 2D .....              | 10        |
| 3.5      | Symmetriebedingungen .....                            | 10        |
| 3.5.1    | Symmetry odd.....                                     | 11        |
| 3.5.2    | Symmetry even .....                                   | 11        |
| 3.5.3    | Master und Slave .....                                | 12        |
| 3.6      | Parameter .....                                       | 13        |
| 3.7      | Manuelle Vernetzungssteuerung.....                    | 13        |
| 3.8      | Solution Setup, Optimetrics und Berechnung.....       | 14        |
| <b>4</b> | <b>Postprocessing</b> .....                           | <b>14</b> |
| 4.1      | Ergebnisse .....                                      | 14        |
| <b>5</b> | <b>Kurzbeschreibungen</b> .....                       | <b>15</b> |
| 5.1      | MAXWELL 2D .....                                      | 15        |
| 5.2      | MAXWELL 3D .....                                      | 17        |
| <b>6</b> | <b>Physikalische Grundlagen des Magnetismus</b> ..... | <b>19</b> |
| 6.1      | Magnetische Feldstärke H.....                         | 19        |
| 6.2      | Magnetische Induktion B .....                         | 20        |
| 6.3      | Magnetischer Fluss $\Phi$ .....                       | 21        |
| 6.4      | Magnetische Feldenergie .....                         | 21        |
| 6.5      | Ferromagnetische Materialien.....                     | 21        |
| 6.6      | Hart- und weichmagnetische Materialien .....          | 22        |
| 6.7      | Magnetkreisberechnung .....                           | 23        |
| 6.8      | Ohm'sches Gesetz des Magnetismus .....                | 27        |
| 6.9      | Magnetkräfte .....                                    | 29        |
| 6.9.1    | Reluktanzkräfte.....                                  | 29        |
| 6.9.2    | Maxwell'sche Zugkraftformel .....                     | 30        |
| 6.9.3    | Horizontale Kraftwirkung der Reluktanzkraft.....      | 31        |
| 6.9.4    | Lorentzkraft .....                                    | 32        |

# 1 Einleitung

MAXWELL ist ein Programm, das die Finite-Elemente-Methode zur Berechnung statischer und zeitlich veränderlicher elektrischer und magnetischer Felder in 2D und 3D verwendet.



**Abbildung 1: Übersicht der mit MAXWELL berechenbaren Felder**

In diesem Skript wird nach einer kurzen Erläuterung der Finite-Elemente-Methode ausschließlich die Verwendung von MAXWELL zur Berechnung magnetostatischer Probleme erläutert. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, sondern vielmehr versucht, Ungeübten den Einstieg in und den Umgang mit MAXWELL zu erleichtern.

## 2 Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode ist ein numerisches Verfahren zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen. Das Berechnungsgebiet wird dabei in eine beliebig große Anzahl von endlich (finit) großen Elementen unterteilt, die sich mit einer endlichen Anzahl von Parametern beschreiben lassen. Innerhalb dieser Elemente werden Ansatzfunktionen definiert, die geeignet sind, die exakte Lösung des zu berechnenden Felds hinreichend genau zu approximieren. Neben Anfangs- und Randbedingungen werden Übergangsbedingungen an den Elementgrenzen definiert, welche die Stetigkeit der Lösung an den Elementgrenzen sicherstellen. Stetigkeit bedeutet in Bezug auf die Feldlinien der magnetischen Induktion, dass diese von einem zum nächsten Element nicht unterbrochen werden. Durch Einsetzen der Ansatzfunktionen sowie der Anfangs-, Rand- und Übergangsbedingungen in die Differentialgleichung erhält man ein numerisch lösbares lineares Gleichungssystem, dessen Lösung letztendlich eine Approximation der Lösung der betrachteten Differentialgleichung darstellt. Die Größe des zu lösenden Gleichungssystems hängt maßgeblich von der Anzahl der finiten Elemente ab. Die zu lösende Gesamtmatrix des Gleichungssystems ist dünn besetzt, da jedes Element nur mit wenigen benachbarten Elementen verbunden ist und somit die meisten Einträge der Gesamtmatrix Null sind. Deshalb bietet sich zur Lösung des Gleichungssystems ein direktes Lösungsverfahren, wie beispielsweise der Gauß-Algorithmus an.

## 2.1 Finite Elemente und adaptive Netzverfeinerung

Bei zweidimensionalen Problemen sind die finiten Elemente dreieckig, bei dreidimensionalen Problemen sind es Tetraeder (vierseitige Pyramiden). Die Endpunkte der Kanten der finiten Elemente heißen Knoten. Alle finiten Elemente zusammen bilden das Netz (Mesh). MAXWELL verfügt über eine adaptive Netzverfeinerung, d.h. MAXWELL führt eine lokale Fehlerbetrachtung durch, der in der Magnetostatik die Gleichung  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , d.h. es existieren keine magnetischen Monopole, zu Grunde liegt. Der lokale Fehler ergibt sich durch eine von Null verschiedene Divergenz an der betrachteten Stelle. Der lokale Fehler ist groß, wenn die Approximation des einzelnen Elements zu ungenau ist. Finite Elemente lassen sich umso genauer approximieren, je feiner und gleichmäßiger sie sind (gleiche Kantenlängen der Dreiecke bzw. Tetraeder). In der Abbildung 2 ist beispielhaft die Approximation eines eindimensionalen Systems der Eingangsvariablen  $x$  dargestellt.  $y(x)$  sei die exakte Lösung des betrachteten Systems. Das Lösungsgebiet ist bereits in finite Elemente unterteilt. Die finiten Elemente sind Strecken, die sich lediglich in ihrer Länge unterscheiden können und die Elementgrenzen sind Punkte. Je enger die Unterteilung ist, desto genauer kann die exakte Lösung angenähert werden. Dazu ist es hilfreich, sich vorzustellen, die Interpolation zwischen den Intervallgrenzen sei linear, wenngleich tatsächlich Polynome höherer Ordnung zur Anwendung kommen. Es wird außerdem klar, dass es sinnvoll ist, in Bereichen großer Krümmung feiner zu elementieren. Krümmung bezeichnet hier die Höhe der zweiten Ableitung der Zielfunktion bzw. die Änderung der ersten Ableitung. Die feinere Elementierung in Bereichen starker Krümmung ist in der Abbildung 2 dargestellt.

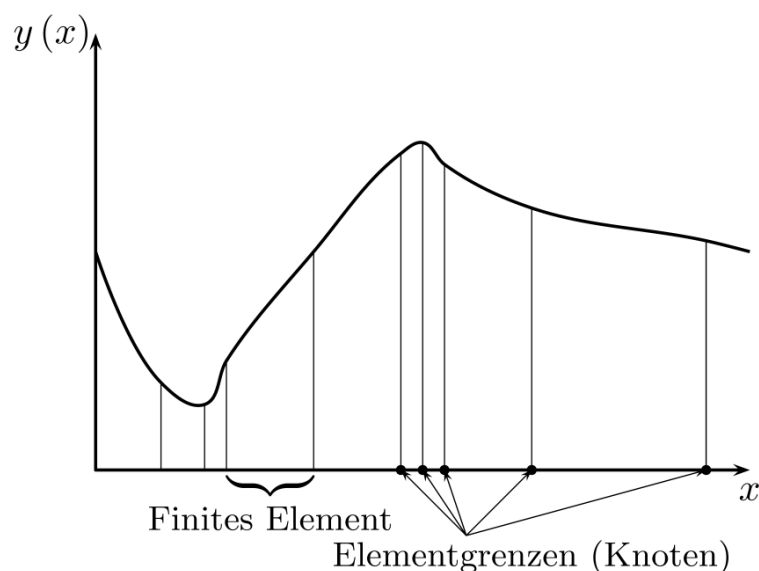


Abbildung 2: Annäherung der exakten Lösung  $y(x)$  einer DGL mit Hilfe von finiten Elementen

Um auch die Bereiche großer Abweichung des Feldwerts von Null ausreichend genau zu diskretisieren und somit den Fehler zu minimieren, ist eine globale, d.h. ganzheitliche Verfeinerung des Gitternetzes aufgrund des damit verbundenen erhöhten Speicher- und Rechenzeitaufwands nicht sinnvoll. Die adaptive Netzverfeinerung beschränkt sich auf die Bereiche des

Berechnungsgebiets, wo der errechnete Fehler groß ist (der zulässige Percent Error wird hier überschritten) und elementiert dort mit jedem iterativen Rechenzyklus zur Lösung des Gleichungssystems entsprechend feiner. Dies geschieht so lange, bis eine der beiden zu definierenden Abbruchbedingungen, Maximum Number of Passes und Percent Error, die Netzverfeinerung beendet. Mit Maximum Number of Passes wird die maximale Anzahl iterativer Rechenzyklen der Netzverfeinerung zum Erreichen einer konvergenten Lösung begrenzt. Percent Error beschreibt das in Prozent umgerechnete Verhältnis zwischen der Energie, die sich aus den lokalen Fehlern ergibt und der Gesamtfeldenergie. Wird Maximum Number of Passes erreicht oder der zulässige Percent Error unterschritten, bricht die Berechnung der Lösung des Gleichungssystems ab.

## 2.2 Schritte einer FEM-Berechnung

Kommerzielle FEM-Software wird zur Berechnung mechanischer, fluiddynamischer, elektromagnetischer und anderer physikalischer Probleme genutzt. Trotz der Verschiedenheit der physikalischen Fragestellung ähnelt sich die Vorgehensweise zur Modellierung in den unterschiedlichen Programmen stark. Sie gliedert sich in folgende Schritte:

### 1. Preprocessing

- a. Erstellen der Geometrie
- b. Zuweisen von Materialeigenschaften, z.B. magnetische Permeabilität
- c. Zuweisen von Lasten (z. B. Verteilung von Strömen in einer elektromagnetischen Analyse) und Randbedingungen (z.B. Symmetriebedingungen in einer elektromagnetischen Analyse)
- d. Elementierung

### 2. Solver

- a. Erstellen der Gleichungssysteme
- b. Lösen der Gleichungssysteme

### 3. Postprocessing

- a. Darstellung der Ergebnisse z. B. mit Feldliniendiagrammen
- b. Interpretation der Ergebnisse

Das Erstellen und Lösen der Gleichungssysteme führt das FE-Programm in der Regel eigenständig aus. Auf die Einzelheiten des Preprocessings und des Postprocessings bei Verwendung von MAXWELL wird in den folgenden zwei Kapiteln ausführlich eingegangen.

## 3 Preprocessing

### 3.1 Koordinatensysteme

Das kartesische Koordinatensystem (XY-Ebene) wird für so genannte 2,5-dimensionale Geometrien genutzt, d.h. für Geometrien, die keine Hinterschneidungen in der dritten Raumrichtung aufweisen und sich durch lineares Austragen entlang der dritten Raumachse der in der XY-Ebene gezeichneten Geometrie ergeben. Das zylindrische Koordinatensystem verwendet man für rotationssymmetrische Geometrien. Diese werden in einem Quadranten so erstellt, dass eine 360°-Rotation um die Rotationsachse Z die eigentliche zu berechnende rotationssymmetrische Geometrie ergibt.

Wenn eine Modellierung der Geometrie in 2D möglich ist, ist die zweidimensionale Berechnung in jedem Fall zu bevorzugen, da die zu lösenden Gleichungssysteme im Dreidimensionalen schnell deutlich komplexer als im Zweidimensionalen werden und die Rechenzeit damit beträchtlich zunimmt. Ist es aber notwendig ein Problem in drei Dimensionen zu berechnen, so sollte versucht werden, das Gleichungssystem durch Nutzung von Symmetrien so weit wie möglich zu reduzieren (dazu später mehr). Der Vorteil dreidimensionaler FEM-Berechnungen liegt darin, prinzipiell jede beliebige Geometrie berechnen zu können, während zweidimensionale Berechnungen zwar ressourcenschonender und im Allgemeinen schneller sind, ihr Einsatz jedoch häufig daran scheitert, dass die zu berechnende Geometrie nicht im Zweidimensionalen abgebildet werden kann. Ein weiterer Vorteil dreidimensionaler Systeme ergibt sich im Hinblick auf das Marketing bei Kunden. 3D-Systeme wirken professioneller und die ausgegeben Bilder sind optisch ansprechender. Nicht zuletzt erlauben sie es auch im Lesen von technischen Zeichnungen ungeübten Personen die Geometrie zu erkennen.

Bei 2D-Rechnungen ist zu beachten, dass, berechnet man beispielsweise die Reluktanzkraft, die auf den beweglichen Schenkel des in 2D im kartesischen Koordinatensystem berechneten Magnetkreises wirkt, so kalkuliert MAXWELL die Reluktanzkraft für einen in der dritten Raumrichtung um 1 m ausgedehnten Magnetkreis. Dieses Ergebnis muss anschließend auf die tatsächliche Tiefenausdehnung umgerechnet werden. Vergleicht man die Ergebnisse der im Dreidimensionalen berechneten Kraft mit der auf die gleiche Tiefenausdehnung umgerechneten im Zweidimensionalen, im kartesischen Koordinatensystem berechneten Kraft, so zeigt sich eine Abweichung. Diese Abweichung rührt daher, dass MAXWELL im Zweidimensionalen, im kartesischen Koordinatensystem die Streufelder nur in der XY-Ebene und nicht in der dritten Raumrichtung berechnet. Bei rotationssymmetrischen Geometrien, die im Zweidimensionalen, zylindrischen Koordinatensystem berechnet wurden, ergibt sich keine Abweichung zur dreidimensionalen Berechnung, da die Streufelder ebenfalls rotationssymmetrisch sind und somit schon bei der Berechnung in der zu rotierenden Ebene mitberücksichtigt werden.

## 3.2 Erstellen der Geometrie

Nach dem Start von MAXWELL öffnet sich die in der Abbildung 3 gezeigte Benutzeroberfläche und im Project Tree im Project Manager wird automatisch ein neues Project angelegt. Über die beiden markierten Symbole der Toolbar kann nun der Arbeitsraum für ein MAXWELL 2D oder 3D Design geöffnet werden.

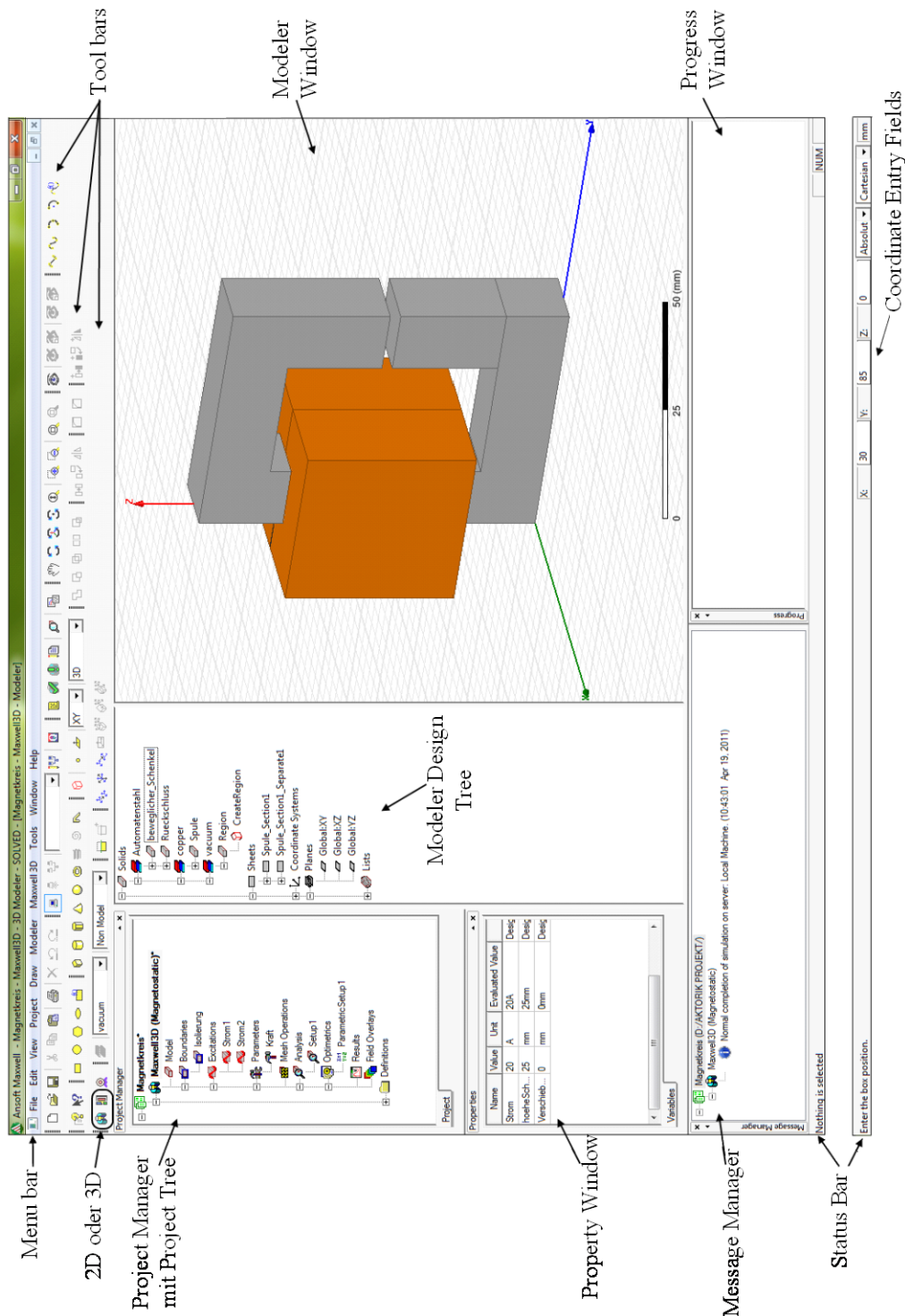


Abbildung 3: Benutzeroberfläche von MAXWELL

Die Art des zu berechnenden Felds (elektrisch, magnetisch) bestimmt man, indem man in der Menüleiste ► **Maxwell 2D/3D** ► **Solution Type** aufruft und entsprechendes auswählt. Für die Berechnung von zweidimensionalen Problemen stehen zusätzlich zwei verschiedene Koordinatensysteme zur Verfügung, das kartesische Koordinatensystem (Koordinaten X,Y) und das Zylinderkoordinatensystem (Koordinaten R,Z). Die Kenntnis verschiedener Shortcuts, die in der Tabelle 1 aufgeführt sind, erleichtert den Umgang mit MAXWELL.

| Shortcut              | Funktion   |
|-----------------------|--|
| B                     | Oberfläche/Objekt hinter der aktuellen Auswahl auswählen |
| F                     | Oberflächenauswahlmodus                                  |
| O                     | Objektauswahlmodus                                       |
| Strg+A                | Alle sichtbaren Objekte auswählen                        |
| Strg+D                | Modellgröße an Fensterbereich anpassen                   |
| Shift+linke Maustaste | Modell ziehen  |
| Alt+linke Maustaste   | Modell rotieren  |

**Tabelle 1: Hilfreiche MAXWELL Shortcuts**

Zusätzlich können die gewünschte Längeneinheit der zu erstellenden Geometrie über ► **Modeler** ► **Units** und die Eigenschaften des Hintergrundnetzes über ► **View** ► **Grid Settings** eingestellt werden. Die mit Augen versehenen Piktogramme dienen zum Ein- und Ausblenden der Bauteile.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Objekte in MAXWELL zu erstellen. MAXWELL bietet eine Auswahl von Piktogrammen zum Erstellen von Grundgeometrieformen, geraden Linien, Kurven und Bögen. Alle Objekte lassen sich mit Unite, Subtract, Intersect, Split, Imprint beliebig miteinander kombinieren, mit Move, Rotate, Mirror lassen sie sich verschieben, rotieren und spiegeln, mit Duplicate Along Line, Duplicate Around Axis, Duplicate Mirror lassen sie sich vervielfältigen. Die Piktogramme zum Erstellen und Bearbeiten von Objekten heben sich aufgrund der gelben Farbe von den übrigen Piktogrammen deutlich ab. Beim Erstellen von Objekten besteht die Möglichkeit, die Koordinaten während des Erstellens direkt in die Coordinate Entry Fields einzutragen, nachträglich können sie per Mouseklick auf das Create-Symbol im Modeler Design Tree geändert werden. Es können Zahlen, Variablen oder einfache mathematische Zusammenhänge wie beispielsweise zur Berechnung eines Sinus  $\sin()$  eingesetzt werden. Gibt man eine Variable zum ersten Mal ein, so erscheint ein Fenster, in dem nach dem Wert (Value) der Variable gefragt wird. Hier müssen eine Zahl und eine Einheit eingegeben werden. Um eine bessere Übersichtlichkeit zu erreichen, kann man die einzelnen Objekte umbenennen und ihre Farbe ändern. Zusätzlich besteht die Möglichkeit mit CAD-Software erstellte Bauteile oder Baugruppen als Step-Dateien zu importieren über

► **Modeler** ► **Import**. Dabei ist zu beachten, dass sich die Abmaße importierter Objekte nachträglich nicht verändern lassen. Mittels ► **MAXWELL 2D/3D** ► **Create 2D/3D Design** lassen sich zweidimensionale Objekte in dreidimensionale Objekte umwandeln und umgekehrt. Das lineare Verschieben, Rotieren des bestehenden Koordinatensystems sowie das Einfügen eines relativen Koordinatensystems ist möglich, wird jedoch selten genutzt. Vermessen lassen sich die erstellten Objekte über ► **Modeler** ► **Measure**.

Ist die Modellgeometrie vollständig erstellt, wird der Berechnungsraum, innerhalb dem MAXWELL das magnetische Feld berechnet, eingegrenzt. In MAXWELL 2D zeichnet man zunächst ein Rechteck um das Modell, bzw. erstellt mit ► **Create Region** (Piktogramm in Form eines perspektivischen Würfels mit roten Kanten) eine Umgebung, die üblicherweise 200 % größer als das Modell ist. Mittels ► **Select Edges** wählt man in beiden Fällen die Kanten der Umgebung aus und definiert sie über ► **Assign Boundary** ► **Balloon** als Berechnungsraum. Zu beachten ist, dass im Zylinderkoordinatensystem eine Kante der Umgebung mit der Rotationsachse zusammenfällt und nur die drei übrigen Kanten zur Zuweisung der Boundary Balloon ausgewählt werden. In MAXWELL 3D genügt es die Region zu erstellen, eine Boundary Balloon Zuweisung ist nicht erforderlich. Dem Berechnungsraum wird standardmäßig Vacuum als Material zugewiesen.

### 3.3 Materialzuweisung

MAXWELL verfügt über eine umfangreiche Materialdatenbank, die durch Rechtsklick auf das Objekt und ► **Assign Material** geöffnet wird. Die vorhandenen Materialien können über View/Edit, Clone bearbeitet werden. So ist es beispielsweise möglich, die Magnetisierungsrichtung eines Permanentmagneten zu ändern, bzw. durch Auswahl des Zylinderkoordinatensystems (im Materialfenster) die Art der Magnetisierung von diametral auf radial zu ändern, indem man für die R-Koordinate -1 oder +1 einsetzt. Da die mit MAXWELL berechneten Bauteile im Anschluss üblicherweise auch gefertigt werden und die Materialparameter der Materialien aus der Datenbank von realen Materialien abweichen können, lassen sich für weichmagnetische Materialien die BH-Kurven (Neukurve) verändern oder in Form von \*.tab oder \*.bh Dateien importieren. Für hartmagnetische Materialien lassen sich die relative Permeabilität und die Koerzitivfeldstärke anpassen.

### 3.4 Zuweisen von Lasten

Im elektromagnetischen Fall bedeutet das Zuweisen von Lasten, das Zuweisen einer elektrischen Erregung (Excitation). In der Regel werden dabei Spulen bestromt, um ein Magnetfeld zu erzeugen.

#### 3.4.1 Erstellen von Spulen in MAXWELL 3D

Spulen werden als Objekt in MAXWELL 3D so erstellt, dass sie von mindestens einer Koordinatenebene symmetrisch geschnitten werden. Dies erleichtert später das Zuweisen der

Bestromung. Als Material weist man ihnen üblicherweise Kupfer zu. Damit der Strom die Spule nicht verlässt, muss sie isoliert werden. Dazu wählt man die Spule aus und erzeugt anschließend mit **►Assign Boundary►Insulating** die Isolation. Mit **►Edit►Surface►Section** wird in der die Spule symmetrisch schneidenden Koordinatenebene eine Querschnittsebene erzeugt. Diese wird mit **►Edit►Boolean►Separate Bodies** in zwei einzelne Hälften geteilt, von denen man nun eine auswählt. Über **►Assign►Excitation►Current** öffnet sich ein Fenster, in dem die Parameter des Stroms festgelegt werden können. Als Wert des Stroms müssen hier die Ampèrewindungen eingetragen werden, d.h. bei einer Spule mit 150 Windungen, die von 2 A durchflossen werden soll, wird hier 300 A eingetragen. Solid bedeutet dabei, dass MAXWELL die Spule als aus Vollmaterial bestehend ansieht, Stranded bedeutet, MAXWELL nimmt an, dass der Spulenkörper in unendlich viele einzelne, gegeneinander isolierte Windungen unterteilt ist. Die zweite Hälfte der Querschnittsebene wird gelöscht.

### 3.4.2 Erstellen von Spulen in MAXWELL 2D

Spulen werden in MAXWELL 2D im kartesischen und im Zylinderkoordinatensystem, wie in der Abbildung 4 dargestellt, gezeichnet. Das Zuweisen einer Bestromung erfolgt analog zum Vorgehen in MAXWELL 3D, ausgenommen, dass das Erzeugen und Teilen der Querschnittsebene sowie das Isolieren der Spule überflüssig sind.

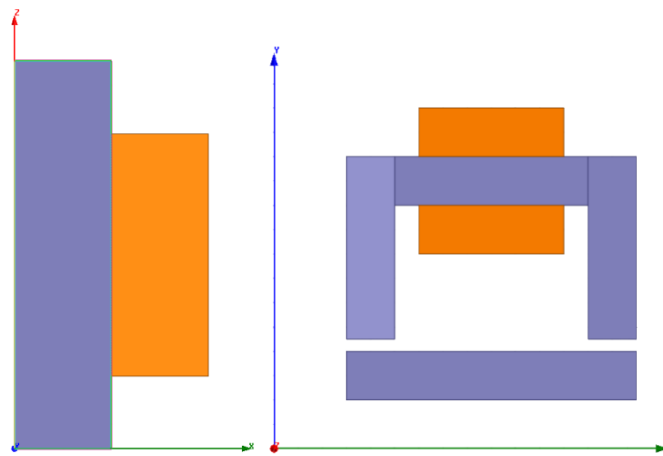


Abbildung 4: Darstellung von Spulen in MAXWELL 2D: im Zylinderkoordinatensystem (links), im kartesischen Koordinatensystem (rechts)

## 3.5 Symmetriebedingungen

Da die Anzahl der Rechenschritte und damit die Rechenzeit zur Lösung eines Gleichungssystems exponentiell mit der Anzahl an Variablen steigt, ist es sinnvoll, das Modell und damit die Element- und Knotenzahl mit Hilfe von Randbedingungen so klein wie möglich zu halten. Dazu werden Symmetriebedingungen definiert, welche den Symmetriekanten bzw. -flächen des Modells zugewiesen werden. In MAXWELL stehen verschiedene Arten von Randbedin-

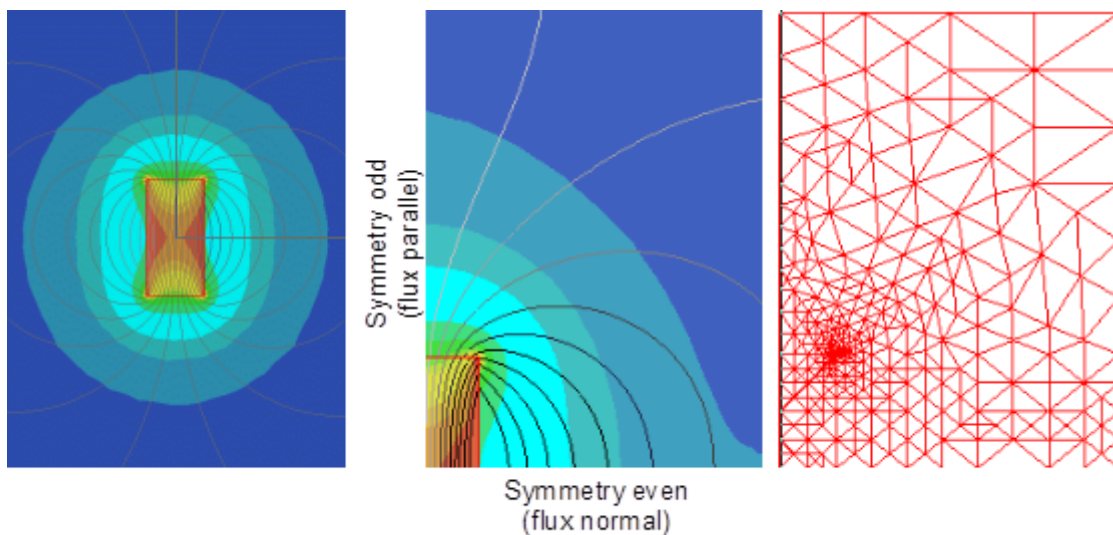
gungen zu Verfügung. Diese werden im Folgenden kurz erläutert. Zu beachten ist, dass die Wirkung auf magnetische und elektrische Felder genau invertiert ist.

### 3.5.1 Symmetry odd

Diese Randbedingung definiert, dass der magnetische Fluss, also die Feldlinien des B-Felds, tangential zur Grenzfläche verlaufen (siehe Abbildung 5). Im Fall eines E-Felds treten die Feldlinien normal durch die Grenzfläche ein- oder aus.

### 3.5.2 Symmetry even

Diese Randbedingung definiert, dass der magnetische Fluss, also die Feldlinien des B-Felds, normal in die Grenzfläche ein- bzw. austreten (siehe Abbildung 5). E-Feldlinien hingegen laufen tangential zu dieser Grenzfläche.



**Abbildung 5:** Feld eines Stabmagneten (links), Verkleinerung des Modells mit Hilfe von Symmetriebedingungen (mittig) und zugehörige Elementierung (rechts)

### Zuweisen von Symmetry odd/Symmetry even

Um diese Symmetriebedingungen anwenden zu können, reduziert man das Modell zuvor so, dass Schnittkanten entstehen, an denen der magnetische Fluss tangential oder normal verläuft. Als Boundary Balloon wählt man in MAXWELL 2D alle Kanten des Berechnungsraums, die keine Symmetriekanten sind. In MAXWELL 3D ist es nicht erforderlich, die Region als Boundary Balloon zu definieren. Anschließend weist man die entsprechende Symmetrie in MAXWELL 2D der ausgewählten Symmetriekante in MAXWELL 3D der ausgewählten Symmetrieebene über ► **Assign Boundary** ► **Symmetry** ► **odd/even** zu.

### 3.5.3 Master und Slave

Liegt als MAXWELL-Modell eine Geometrie mit zyklischen Symmetrien vor, kann diese mit Hilfe der Master- und Slave-Randbedingungen reduziert werden um die Rechenzeit zu verkürzen. Dabei lässt sich ausnutzen, dass sich identische Feldverläufe bei bestimmten Winkeln wiederholen (siehe Abbildung 6). Statt der Berechnung der gesamten 360°-Geometrie, wird nur ein Winkelsegment modelliert und berechnet. Anhand der Ergebnisse für das Winkelsegment kann dann auf das Gesamtmodell rückgeschlossen werden.

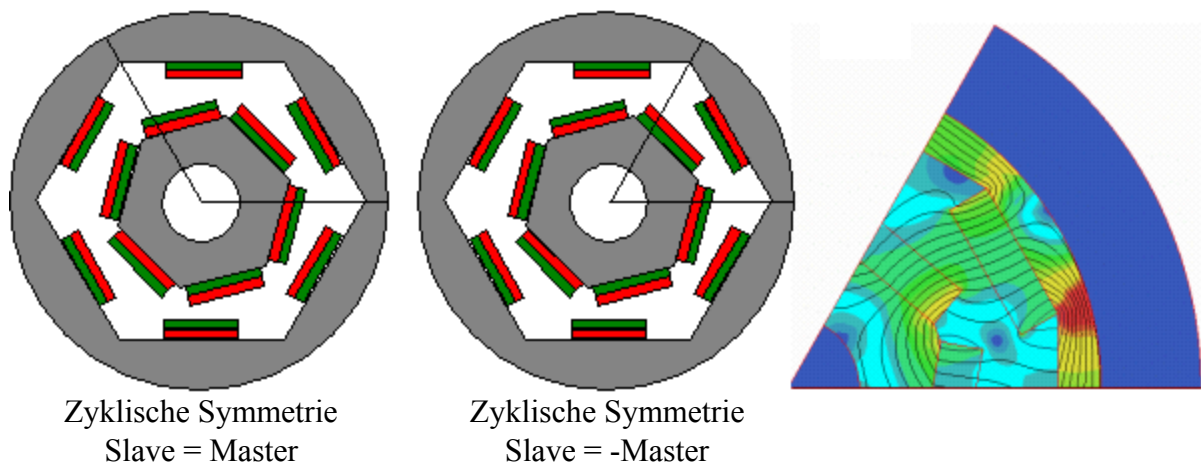
Eine zyklische Symmetrie ist gegeben, wenn an jedem Punkt entlang einer ersten Symmetrielinie (Master) der gleiche Betrag der magnetischen Feldstärke  $H$  auftritt wie entlang der zweiten Symmetrielinie (Slave).

Liegt diese zyklische Symmetrie vor, reicht es aus nur ein Winkelsegment zu modellieren und die Grenzflächen in MAXWELL als „**Master**“ und als „**Slave**“ zu definieren. Je nach vorliegender Symmetrie wird der Zusammenhang zwischen Master und Slave entsprechend definiert als:

- **Slave = Master**
- **Slave = - Master**

Durch das Zuweisen der Master-Slave-Randbedingung wird die Elementierung auf beiden Grenzflächen kompatibel gestaltet, d.h. die Knoten des Masters liegen an den gleichen Positionen wie die Knoten des Slaves.

Dies soll im Folgenden anhand der Abbildung 6 erläutert werden.



**Abbildung 6: Master und Slave Randbedingungen am Beispiel einer ausgelenkten Magnetkupplung**

Ein 120°-Segment der ausgelenkten Magnetkupplung weist zyklische Symmetrie des Typs Slave = Master auf (siehe Abbildung 6 links), während ein 60°-Segment zyklische Symmetrie des Typs Slave = - Master zeigt (siehe Abbildung 6 Mitte). Der Unterschied zwischen beiden besteht darin, dass die Magnete, die von den Segmentgrenzen geschnitten werden, in Abbil-

dung 6 links gleichsinnig und in Abbildung 6 Mitte gegensinnig magnetisiert sind. Der rechte Bildteil zeigt den Verlauf des berechneten Magnetfelds für ein  $60^\circ$ -Segment mit Hilfe von Slave = - Master. Es ist zu erkennen, dass die Feldlinien an den Segmenträndern ineinander münden. Allerdings ist die Feldrichtung genau gegensinnig (Slave = - Master), was aus dem Modell der Magnetkupplung (siehe Abbildung 6 Mitte) resultiert.

## Zuweisen von Master und Slave

Zunächst wird das Objekt sinnvollerweise auf das kleinstmögliche Segment, auf das die Slave = Master bzw. die Slave = - Master Beziehung angewendet werden kann, reduziert. Anschließend weist man den Segmentschnittkanten bzw. Segmentschnittebenen über **►Assign Boundary►Master** bzw. **Slave** die jeweilige Randbedingung zu. Der Anleitung des sich öffnenden Fensters folgend erstellt man einen New Vector U. Dieser muss bei einem MAXWELL-2D-Modell im Modellursprung starten und entlang der einen Segmentschnittkante verlaufen. Die Richtung muss dabei der positiven Koordinatenrichtung entsprechen (ggf. Swap Direction auswählen, um die Richtung umzukehren). Im Slave-Fenster definiert man die Slave-Boundary zur zuvor definierten Master Boundary und wählt die Beziehung Slave = Master ( $B_s = B_m$ ) bzw. die Slave = - Master ( $B_s = -B_m$ ). Genau wie bei den odd/even-Randbedingungen werden nur die nicht als Symmetriekanten definierten Kanten des Berechnungsbereichs als Boundary Balloon definiert.

In MAXWELL 3D ist das Vorgehen äquivalent, nur werden hier die Segmentschnittebenen ausgewählt und der Vektor, der zur Definition der Master- bzw. Slaverandbedingung gezeichnet wird (Vector U), hat den Ursprung und die positive Richtung der Koordinatenachse, welche die Rotationssymmetrieachse darstellt. Die Richtung des Vectors V muss jeweils in positive Koordinatenrichtung weisen und kann ggf. mit Reverse Direction geändert werden.

## 3.6 Parameter

Bei der Auslegung eines elektromagnetischen Aktors ist neben dem erzeugten Magnetfeld je nach Aktorprinzip besonders das erzeugte Drehmoment oder die erzeugte Kraft der beweglichen Komponenten von Interesse. Damit diese mitberechnet werden, muss, bevor die Berechnung durchgeführt wird, der oder den Komponenten, auf welche die zu berechnende Kraft, bzw. das Drehmoment wirkt, Kraft oder Drehmoment als Parameter zugewiesen werden. Dies erfolgt durch **►Assign Parameter►Force/Torque**.

## 3.7 Manuelle Vernetzungssteuerung

Wie bereits beschrieben, verfeinert MAXWELL eigenständig das Netz adaptiv bei jedem iterativen Rechenzyklus. Das Netz lässt sich zusätzlich manuell verfeinern, um die Anzahl an iterativen Rechenschritten zu verringern, die durchlaufen werden, bis ein ausreichend feines Netz durch die adaptive Netzverfeinerung erzeugt ist.

Dazu wählt man **►Assign Mesh Operation►Inside Selection►Length Based**. Es öffnet sich ein Fenster, in dem man die maximale Länge der finiten Elemente und/oder die maxima-

le Anzahl dieser beschränken kann. Anzeigen lassen kann man sich das Netz im ausgewählten Objekt per ► **Rechtsklick** ► **Plot Mesh**.

### 3.8 Solution Setup, Optimetrics und Berechnung

Um eine Berechnung zu starten, muss durch Rechtsklick auf Analysis ein Solution Setup angelegt werden. Hier werden die bereits erläuterten Abbruchbedingungen Maximum Number of Passes und Percent Error definiert. Mit einem Maximum Number of Passes von 20 und einem Percent Error von 0,1 erhält man in der Regel in endlicher Zeit ein konvergentes, hinreichend genaues Ergebnis.

Um eine Variation einer eingeführten Variable zu berechnen, beispielsweise das schrittweise Erhöhen des Stroms, Rotation eines Objekts um einen variablen Winkel etc. muss zudem unter ► **Optimetrics** ein Parametric Setup hinzugefügt werden. Die Variable kann so mit konstanter Schrittweite sowohl erhöht als auch verringert werden.

Damit die Ergebnisse der Feldberechnung einzelner Variationen anschließend auch zur Verfügung stehen sollte im gleichen Fenster unter Options ein Häkchen bei „Save Fields and Mesh“ gesetzt werden.

Das einmal erstellte Analysenetz lässt sich mit einem Häkchen bei „Copy geometrically equivalent meshes“ für verschiedene Variationen der parametrischen Analyse wiederverwenden. „Copy geometrically equivalent meshes“ lässt sich jedoch nur einstellen, falls bei den einzelnen Variationen keine geometrische Änderung, wie beispielsweise eine Längenänderung stattfindet.

Die Validierung des zu berechnenden Modells erfolgt durch Anklicken des grünen Hakens. Fehler im Modell werden so vor Beginn der Berechnung entdeckt und angezeigt. Die Berechnung startet durch Anklicken des grünen Ausrufezeichens und kann je nach Komplexität des Modells, Umfang der Variationen und Prozessorleistung bzw. vorhandenem Arbeitsspeicher wenige Sekunden bis mehrere Tage dauern.

## 4 Postprocessing

### 4.1 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Modellrechnung lassen sich in MAXWELL auf verschiedene Arten darstellen. Die magnetische Induktion  $B$  und die magnetische Feldstärke  $H$  lassen sich sowohl in vektorieller Form als auch als Farbverläufe darstellen. In MAXWELL 2D wählt man dazu alle Objekte, in denen der Feldverlauf angezeigt werden soll und blendet anschließend das Feld mittels ► **Fields** ► **B/H** ein. Zusätzlich lassen sich in MAXWELL 2D die Flusslinien des magnetischen Flusses (Flux  $A$ ) anzeigen. In MAXWELL 3D wählt man entweder eine der drei Koordinatenebenen oder die Oberflächen der Objekte aus, um das Magnetfeld anzeigen zu lassen. Zwischen den Feldverläufen einzelner Variationsdurchgänge, d.h. bestimmter Kombinationen von Variablenwerten wechselt man durch Einsetzen der gewünschten Variab-

lenwerte im Properties Window. Kräfte und Drehmomente werden über **►Results►Solution Data** in tabellarischer Form dargestellt. Zudem besteht die Möglichkeit, Variationsergebnisse wie beispielsweise die Kraft als Funktion des Wegs in einem Diagramm anzeigen zu lassen. Dazu wählt man **►Results►Create Magnetostatic Report►Rectangular Plot**. Es öffnet sich ein Fenster, in dem sich die Variablen den Diagrammachsen zuordnen lassen und ausgewählt werden kann, ob alle Variationen oder nur eine bestimmte Auswahl dargestellt werden soll. Darüber hinaus lassen sich die Daten auch als \*.csv Dateien exportieren. Dazu genügt ein Rechtsklick auf das Diagramm **►Export**.

## 5 Kurzbeschreibungen

### 5.1 MAXWELL 2D

**►Insert MAXWELL 2D Design**

**►Solution Type Magnetostatic**

- Koordinatensystem kartesisch oder zylindrisch

**►Modeler►Units** Millimeter

**►View►Grid Settings** gewünschtes Hintergrundnetz einstellen

Objekte zeichnen:

- dabei Koordinaten während des Zeichnens direkt im Entry Window eingeben
- nachträglich Maße verändern: im Modeler Design Tree bspw. CreateRectangle anklicken, dann im Properties Window Maße ändern
- Variablen oder einfache mathematische Zusammenhänge für Längen etc. eingeben
- Objekte als Step-Dateien importieren **►Modeler►Import**
- aus vorhandenem 2D-Modell 3D-Modell erstellen  
**►MAXWELL2D►Create 3D Design**
- Name, Farbe etc. einstellen **►Edit►Properties**
- Objekte miteinander kombinieren **►Edit►Boolean►Subtract/Intersect/Unite**
- einzelnes Objekt teilen **►Edit►Boolean►Split**
- Objekte bewegen Move (entlang einer Linie), Rotate (um eine Achse)
- Objekte vermessen **►Modeler►Measure**

Material zuweisen: Assign Material

- bestehendes Material aus Materialdatenbank
  - Magnetisierungsrichtung ändern: 1 oder 0 bei gewünschter Koordinate
  - BH-Kurve importieren **►BH Curve►Import Dataset** (\*.bh oder \*.tab)
  - Parameter eines Permanentmagneten ändern Relative Permeability etc.

Berechnungsraum definieren

- mit Piktogramm Region oder durch Zeichnen eines Rechtecks Berechnungsraum ca. 200 % größer als Modell erstellen
- im Zylinderkoordinatensystem muss eine Kante des Berechnungsraums deckungsgleich mit der Z-Achse sein (dies wird automatisch von MAXWELL angepasst)
- im kartesischen Koordinatensystem alle Kanten des Berechnungsraum auswählen
- im Zylinderkoordinatensystem alle Kanten, die nicht deckungsgleich mit der Z-Achse sind, auswählen
- ► **Assign Boundary** ► **Balloon**

Lasten zuweisen:

- Spule bestromen
  - Spulenquerschnittsfläche auswählen (im kartesischen Koordinatensystem nur eine der beiden Querschnittsflächen auswählen, die andere wird anschließend entsprechend mit entgegengesetzter Richtung bestromt)
  - ► **Assign Excitation** ► **Current**
  - Current kann sein Wert, Variable, Formel
  - Solid = Spule besteht aus Kupfervollmaterial
  - Stranded = Spule besteht aus Windungen

Parameter zuweisen:

- Kraft, Drehmoment
- bewegliche Komponente auswählen, auf welche die Kraft bzw. das Drehmoment wirkt
- ► **Assign Parameter** ► **Force/Torque**

manuelle Netzverfeinerung (optional):

- ► **Assign Mesh Operation** ► **Inside Selection** ► **Length based**
  - maximale Kantenlänge der finiten Elemente
  - maximale Anzahl der finite Elemente

Analysis Setup erstellen:

- ► **Analysis** ► **Add Solution Setup**
  - Maximum Number of Passes
  - Percent Error
- Optimetrics (optional)
  - ► **Optimetrics** ► **Add** ► **Parametric**
  - Variable, Start, Stop, Schrittweite auswählen
  - bei Änderung immer Update auswählen
  - Reiter Options: Häkchen setzen bei „save mesh and fields“ (zum Speichern der grafischen Feldinformationen) und „copy geometrically equivalent meshes“ (nur falls sich während der parametrischen Analyse keine geometrischen Größen ändern, lässt sich dieses Häkchen setzen)

Berechnung starten:

- Piktogramm Validate
- Piktogramm Analyze all

Ergebnisse ansehen:

- alles auswählen ► **Rechtsklick** ► **Fields** ► **B,H,A**
- Diagramme ► **Results** ► **Create Magnetostatic Report** ► **Rectangular Plot**
- Daten exportierbar durch Rechtsklick auf das Diagramm ► **Export**
- Tabelle ► **Results** ► **Solution Data**

## 5.2 MAXWELL 3D

► **Insert MAXWELL 3D Design**

► **Solution Type Magnetostatic**

► **ModelerL Units Millimeter**

► **View** ► **Grid Settings** gewünschtes Hintergrundnetz einstellen

Objekte zeichnen:

- dabei Koordinaten während des Zeichnens direkt im Entry Window eingeben
- nachträglich Maße verändern: im Modeler Design Tree bspw. CreateRectangle anklicken, dann im Properties Window Maße ändern
- Variablen oder einfache mathematische Zusammenhänge für Längen etc. eingeben
- Objekte als Step-Dateien importieren ► **Modeler** ► **Import**
- aus vorhandenem 2D- ein 3D-Modell erstellen ► **Maxwell 3D** ► **Create2D Design**
- Name, Farbe etc. einstellen ► **Edit** ► **Properties**
- Objekte miteinander kombinieren ► **Edit** ► **Boolean** ► **Subtract/Intersect/Unite**
- einzelnes Objekt teilen ► **Edit** ► **Boolean** ► **Split**
- Objekte bewegen Move (entlang einer Linie), Rotate (um eine Achse)
- Objekte vermessen ► **Modeler** ► **Measure**

Material zuweisen: Assign Material

- bestehendes Material aus Materialdatenbank
  - Magnetisierungsrichtung ändern: 1 oder 0 bei gewünschter Koordinate
  - BH-Kurve importieren ► **BH Curve** ► **Import Dataset** (\*.bh oder \*.tab)
  - Parameter eines Permanentmagneten ändern Relative Permeability etc.

Berechnungsraum definieren

- mit Piktogramm Region Berechnungsraum ca. 200 % größer als Modell erstellen

Lasten zuweisen:

- Spule isolieren ► **Assign Boundary** ► **Insulating**
- Spule bestromen

- ► **Edit ► Surface ► Section**
- ► **Edit ► Boolean ► Seperate Bodies**
- eine der beiden entstandenen Querschnittsflächen auswählen, die andere wird gelöscht.
- ► **Assign Excitation ► Current**
- Current kann sein Wert, Variable, Formel
- Solid = Spule besteht aus Vollmaterial
- Stranded = Spule besteht aus Windungen

Parameter zuweisen:

- Kraft, Drehmoment
- bewegliche Komponente auswählen, auf welche die Kraft bzw. das Drehmoment wirkt
- ► **Assign Parameter ► Force/Torque**

manuelle Netzverfeinerung (optional):

- ► **Assign Mesh Operation ► Inside Selection ► Length based**
  - maximale Kantenlänge der finiten Elemente
  - maximale Anzahl der finite Elemente

Analysis Setup erstellen:

- ► **Analysis ► Add Solution Setup**
  - Maximum Number of Passes
  - Percent Error
- Optimetrics (optional)
  - ► **Optimetrics ► Add ► Parametric**
  - Variable, Start, Stop, Schrittweite auswählen
  - bei Änderung immer Update auswählen
  - Reiter Options: Häkchen setzen bei „save mesh and fields“ (zum Speichern der grafischen Feldinformationen) und „copy geometrically equivalent meshes“ (nur falls sich während der parametrischen Analyse keine geometrischen Größen ändern, lässt sich dieses Häkchen setzen)

Berechnung starten:

- Piktogramm Validate
- Piktogramm Analyze all

Ergebnisse ansehen:

- alles auswählen ► **Rechtsklick ► Fields ► B,H,A**
- Diagramme ► **Results ► Create Magnetostatic Report ► Rectangular Plot**
- Daten exportierbar durch Rechtsklick auf das Diagramm ► **Export**
- Tabelle ► **Results ► Solution Data**

## 6 Physikalische Grundlagen des Magnetismus

Das Programm MAXWELL dient der numerischen Berechnung von elektrostatischen und magnetischen Feldern. Für den Umgang mit dieser Software im Rahmen der Lehrveranstaltung „Engineering Tools“ am Fachgebiet Mikrotechnik der TU Berlin sind daher Kenntnisse einiger physikalischer Grundlagen erforderlich. Dieses Skript dient zur Vermittlung der wesentlichen physikalischen Inhalte - unabhängig von der verwendeten Software - auf der die Übungen und Hausaufgaben basieren. Dabei wird auf eine grundlegende und umfassende Beschreibung verzichtet und lediglich auf die übungsrelevanten Fragestellungen eingegangen.

### 6.1 Magnetische Feldstärke $H$

Die magnetische Feldstärke  $H$  ist ein Hilfsfeld, welches beispielsweise den Einfluss von makroskopischen, z.B. in Drähten fließenden Strömen beschreibt. Wo immer ein Strom fließt, wird dieser von einem  $H$ -Feld umgeben. Dies wird durch die erste Maxwell'sche Gleichung ohne Verschiebungsstrom ausgedrückt.

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j}, \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta \quad (6-1)$$

Hiernach ist die Rotation des  $H$ -Felds an jeder Stelle gleich der verursachenden Stromdichte  $j$ . Nach dem Satz von Stokes ist dies gleichbedeutend mit der Aussage, dass jedes geschlossene Linienintegral des  $H$ -Felds gleich der Durchflutung  $\Theta = N I$  ist, die durch die vom Integrationsweg eingeschlossenen Fläche fließt. Im Inneren von Spulen konzentriert sich das  $H$ -Feld aus geometrischen Gründen. Für schlanke Zylinderspulen folgt aus (6-1)

$$H = \frac{NI}{l} \quad (6-2)$$

mit der Windungszahl  $N$ , der Spulenlänge  $l$  und dem Spulenstrom  $I$ .

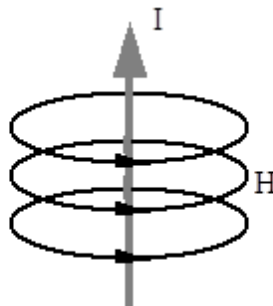


Abbildung 7: Der Strom ist von einem  $H$ -Feld umgeben

## 6.2 Magnetische Induktion B

Die magnetische Induktion B wird heute als das eigentliche Magnetfeld betrachtet, sie bestimmt die magnetischen Kräfte, wie Lorentzkraft und Reluktanzkraft und kann mit Hilfe von geeigneten Sensoren (z.B. Feldplatten oder Hallsensoren) gemessen werden. Die magnetische Induktion wird auch magnetische Flussdichte genannt, weil ihr Flächenintegral den magnetischen Fluss ergibt. Damit stellt sie das Pendant zur Stromdichte in elektrischen Kreisen dar. Auch der Begriff der magnetischen Feldlinien bezieht sich auf die magnetische Induktion. Ihre Richtung stimmt in jedem Punkt mit der Richtung des dortigen B-Vektors überein und ihre Dichte ist proportional zum Betrag von B. Das B-Feld ist quellenfrei, was mit der Aussage identisch ist, dass es keine magnetischen Monopole gibt. Dieser Zusammenhang wird mathematisch durch die zweite Maxwell'sche Gleichung ausgedrückt.

$$\operatorname{div}\vec{B}=0, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A}=0 \quad (6-3)$$

Eine magnetische Induktion kann entweder mit Hilfe eines Permanentmagneten oder durch eine Spule nach dem Zusammenhang

$$B=\mu H \quad (6-4)$$

hervorgerufen werden. Die Proportionalitätskonstante  $\mu$  heißt magnetische Permeabilität. Sie setzt sich nach

$$\mu=\mu_r \cdot \mu_0 \quad (6-5)$$

aus der magnetischen Feldkonstante oder Vakuumpermeabilität  $\mu_0=1,25710 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$  und der relativen Permeabilität  $\mu_r$  zusammen. Letztere ist eine Materialeigenschaft. Für Luft hat sie etwa den Wert 1, während ferromagnetische Werkstoffe Permeabilitäten bis zu 100.000 aufweisen. Allerdings ist diese hierbei eine Funktion von H, also  $\mu_{r,Fe}=\mu_{r,Fe}(H)$ . Materialien mit hohem  $\mu_r$  reagieren bei gleichem H-Feld mit viel höherer magnetischer Induktion B als Luft oder Werkstoffe mit niedrigerem  $\mu_r$ . In Permanentmagneten gilt anstelle von (6-4)

$$B=B_R+\mu H \quad (6-6)$$

da hier die Remanenz  $B_R$ , also die durch den Magneten verursachte magnetische Induktion hinzukommt. Dies wird in Abschnitt 6.8 erläutert. Im Folgenden wird der Begriff Magnetfeld immer das B-Feld bezeichnen.

### 6.3 Magnetischer Fluss $\Phi$

Der magnetische Fluss  $\Phi$  ist definiert als das Flächenintegral der magnetischen Induktion  $B$ .

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (6-7)$$

Ist  $B$  über den gesamten Querschnitt konstant und tritt senkrecht durch  $A$ , so vereinfacht sich dies zu  $\Phi = B \cdot A$ . Dies gilt näherungsweise in den meisten magnetischen Kreisen in kleinen Luftspalten.

### 6.4 Magnetische Feldenergie

Die magnetische Energiedichte ist gegeben durch

$$w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} BH \quad (6-8)$$

Da  $B$  und  $H$  nach (6-4) außerhalb von Permanentmagneten in gleicher Richtung verlaufen, vereinfacht sich dies dort zu

$$w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (6-9)$$

Die gesamte Feldenergie des Systems ergibt sich als Volumenintegral seiner Energiedichte zu

$$W_{\text{mag}} = \int w_{\text{mag}} dV \quad (6-10)$$

### 6.5 Ferromagnetische Materialien

Zunächst sei ein Ringkern betrachtet, auf den eine Spule gewickelt ist (vgl. Abbildung 8). Bei einer Windungszahl von  $N$  tritt ein Gesamtstrom von  $N \cdot I$  (Spulenstrom  $I$ ) durch den Ring. Wendet man (6-1) in Integralform auf dieses System an:

$$\oint H \cdot ds = N \cdot I \quad (6-11)$$

und wählt man als Integrationsweg die gestrichelt eingezeichnete Linie mit dem Umfang  $l$ , so ergibt sich  $Hl = NI$ , also

$$H(l) = \frac{N \cdot I}{l} \quad (6-12)$$

Die magnetische Feldstärke im Kreis ist folglich proportional zum Spulenstrom  $I$ . Das Ringmaterial reagiert darauf mit einer magnetischen Induktion  $B = B(H)$ . Dieser Zusammenhang ist bei ferromagnetischen Materialien nichtlinear und hysteresebefahet (siehe Abbildung 8). Ist der Ring anfangs unmagnetisiert, so wird  $B$  bei steigendem Spulenstrom und damit bei

steigendem  $H$  zunächst der Neukurve folgen. An Punkt A würde eine weitere Erhöhung des  $H$ -Felds nur noch ein geringes Ansteigen der Induktion  $B$  nach (6-4) mit der Vakuumpermeabilität  $\mu_0$  zur Folge haben. An diesem Punkt ist der Eisenkern magnetisch gesättigt. Reduziert man den Strom nun wieder bis auf Null, so folgt  $B$  dem eingezeichneten Verlauf bis zum Punkt B. Obwohl jetzt kein strombedingtes  $H$ -Feld mehr wirkt, bleibt eine magnetische Induktion  $B_R$  zurück, die Remanenz genannt wird. Diese Remanenz ist es, die einen Dauermagneten zum Magneten im herkömmlichen Sinne macht.

Bestromt man die Spule nun in Gegenrichtung, erreicht man bei der Feldstärke  $H_C$ , die Koerzitivfeldstärke genannt wird, den Punkt C, an dem die magnetische Induktion den Wert Null annimmt. Erhöht man den Betrag des  $H$ -Felds weiter in negativer Richtung, so erreicht man schließlich den Punkt D, an dem das Eisen in umgekehrter Richtung gesättigt ist als an Punkt A. Bei einer erneuten Stromumkehr würde die magnetische Induktion nun der unteren Kurve der Hystereseschleife bis zum Punkt A folgen. Die in der Hystereseschleife enthaltene Fläche entspricht der Energie, die aufgebracht werden muss, um die Schleife einmal zu durchfahren. Diese Energie macht sich in Transformatoren als Magnetisierungsverlust bemerkbar.

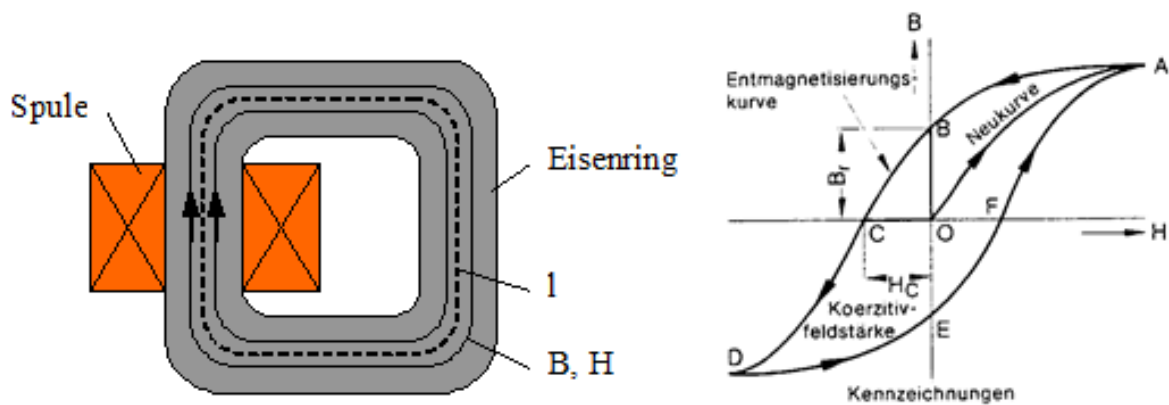


Abbildung 8: Geschlossener Eisenkreis mit Spule (links) und die BH-Kurve ferromagnetischer Materialien (rechts)

## 6.6 Hart- und weichmagnetische Materialien

In der Abbildung 9 sind die  $B$ - $H$ -Kurven eines hart- und eines weichmagnetischen Materials abgebildet. hartmagnetische Materialien weisen eine breite Hysterese mit hoher Koerzitivfeldstärke  $H_C$  auf und werden daher als Permanentmagnete eingesetzt. Bei weichmagnetischen Materialien ist die Hysterese sehr schmal ausgeprägt. Sowohl ihre Koerzitivfeldstärke als auch ihre Remanenz ist deutlich geringer als bei hartmagnetischen Materialien. Ihre Sättigungsinduktion hingegen ist im Idealfall sehr hoch. Aufgrund dieser Eigenschaften wird Weicheisen zur Feldverstärkung in Spulen und als Leitung für den magnetischen Fluss verwendet.

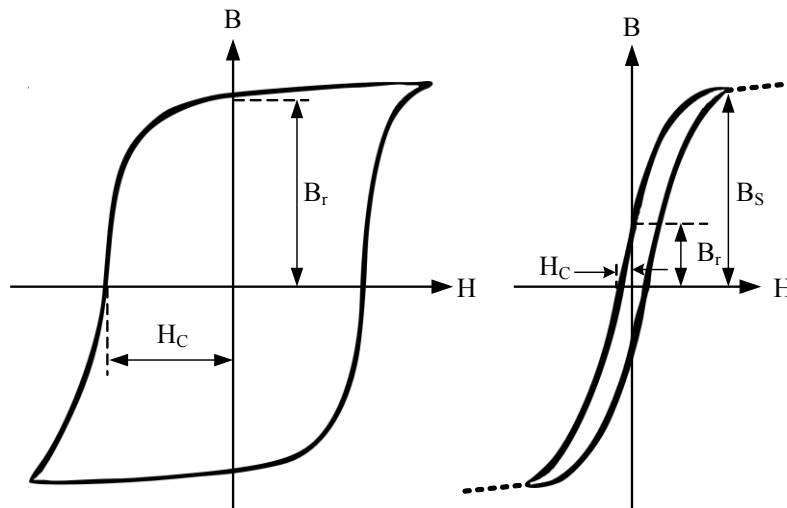


Abbildung 9: BH-Kurven ferromagnetischer Werkstoffe:  
hartmagnetisch (links) und weichmagnetisch (rechts)

Beispiele für Hartmagnetische Werkstoffe sind:

- AlNiCo
- Hartferrite
- Seltenerdmetalle (SmCo, NdFeB)

## 6.7 Magnetkreisberechnung

### Beispiel 1: Weicheisenkreis mit Spule und Luftspalt

Versieht man den magnetischen Kreis aus der Abbildung 8 mit einem Luftspalt, so ergibt sich der in der Abbildung 10 gezeigte Aufbau. Dabei wirkt der Luftspalt aufgrund seiner niedrigen Permeabilität als magnetischer Widerstand, was gegenüber dem Kreis ohne Luftspalt einen geringeren Magnetfluss zur Folge hat. Aus (6-11) folgt

$$l \cdot H_{Fe} + \delta \cdot H_L = N \cdot I \quad (6-13)$$

Da  $\Phi$  wegen (6-3) überall im Kreis, also auch im Luftspalt, den gleichen Wert haben muss, gilt  $\Phi = \Phi_{Fe} = \Phi_L = \text{konstant}$ . Da der Kreisquerschnitt  $A$  im gesamten Kreis konstant ist, folgt daraus wegen  $\Phi = B \cdot A$ ;  $B = B_L = B_{Fe}$ . Berücksichtigt man weiterhin, dass  $B = B_L = \mu_L \cdot H_L$ , so ergibt sich aus (6-13)

$$B = B_L = \frac{\mu_L}{\delta} \cdot N I - \frac{\mu_L \cdot l}{\delta} \cdot H_{Fe} \quad (6-14)$$

Zusammen mit der BH-Kurve von Eisen  $B_{Fe} = B_{Fe}(H_{Fe})$  ergibt sich ein Gleichungssystem, das sich nach  $B$  auflösen lässt. Da die BH-Kurve jedoch nichtlinear ist, muss diese Lösung numerisch oder graphisch erfolgen, wie in der Abbildung 10 dargestellt.

Für die folgende Betrachtung soll von einer linearen BH-Kurve

$$B = B_{Fe} = \mu_{Fe} H \quad (6-15)$$

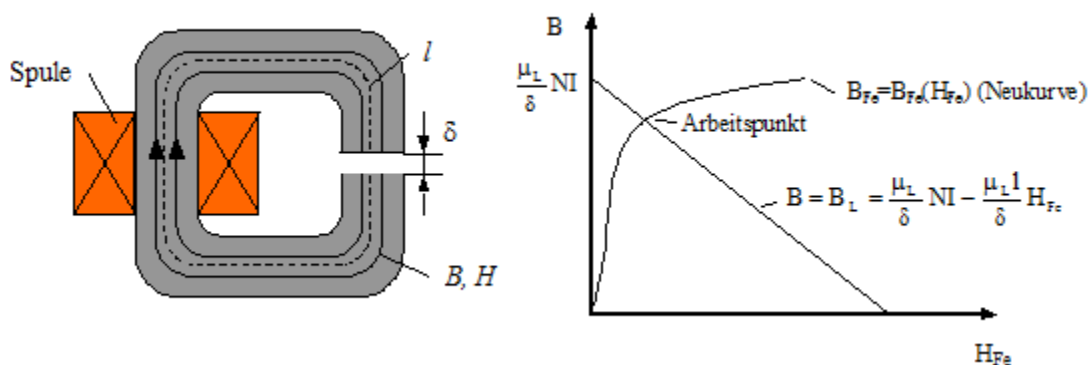
ausgegangen werden. Damit lässt sich das Gleichungssystem (6-13), (6-15) lösen. Für den Arbeitspunkt ergibt sich dann

$$B = \frac{\mu_L}{l} \cdot \frac{NI}{\frac{\mu_L}{\mu_{Fe}} + \frac{\delta}{l}} \quad (6-16)$$

Da  $\mu_{Fe} \gg \mu_L$ , verringert sich der Einfluss des Summanden  $\mu_L / \mu_{Fe}$  gegenüber dem geometrieabhängigen Summanden  $\delta / l$  bei gebräuchlichen Magnetkreisgeometrien deutlich. Der Einfluss von  $\mu_{Fe}$  und damit auch die Nichtlinearität der BH-Kurve des Eisens nehmen daher durch den Luftspalt ab. Vernachlässigt man den Summanden  $\mu_L / \mu_{Fe}$  in (6-16), so ergibt sich für die magnetische Induktion im Kreis in guter Näherung

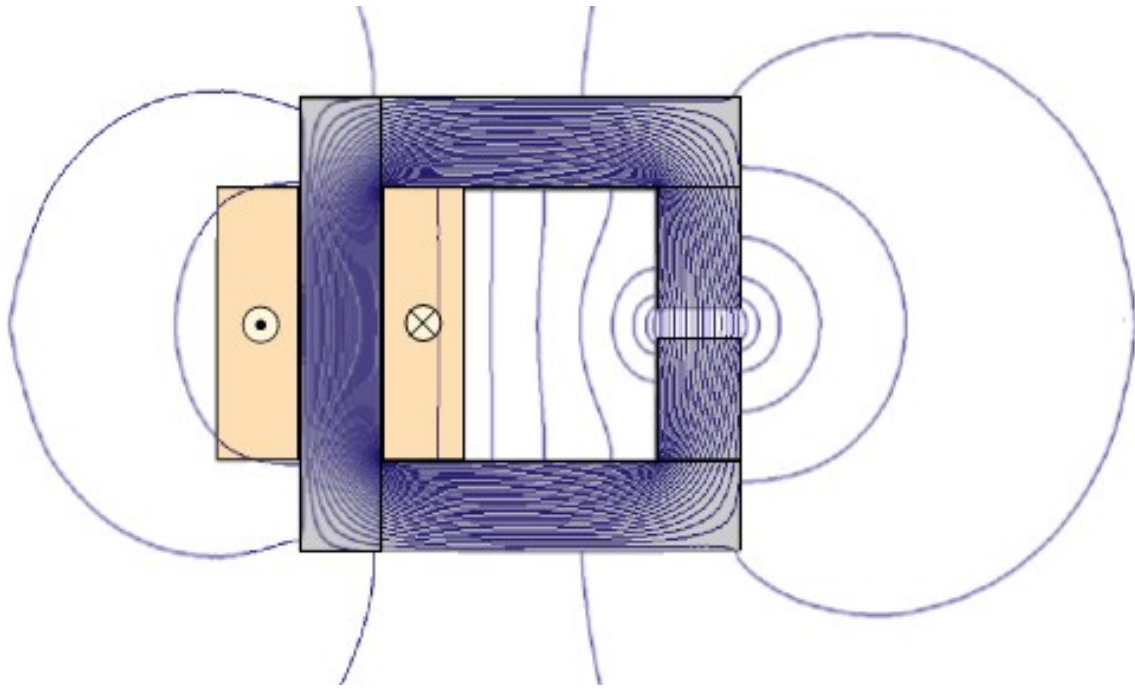
$$B \approx \frac{\mu_L}{\delta} NI \quad (6-17)$$

Das gleiche Ergebnis hätte man erhalten, wenn man den Eisenterm in (6-13) von vorn herein weggelassen hätte. Dies bedeutet, dass der magnetische Widerstand des Eisens in magnetischen Kreisen, ähnlich wie der elektrische Widerstand des Kupfers in elektrischen Kreisen, im Vergleich zu dem in Luft vernachlässigt werden kann.



**Abbildung 10: Magnetischer Kreis mit Luftspalt (links) und graphische Ermittlung seines Arbeitspunktes in der BH-Neukurve von Weicheisen (rechts)**

Die oben angeführten analytischen Rechnungen basieren auf der Annahme, dass die Querschnittsfläche des magnetischen Flusses im Eisen und im Luftspalt gleich groß ist. Tatsächlich kann es jedoch zu Kurzschlüssen zwischen den Eisenteilen und Streuflüssen um den Arbeitsspalt herum kommen (siehe Abbildung 11 bis Abbildung 13). Die Berechnungen zu den Abbildungen entstammen aus MAXWELL 2D. Hierbei ist  $\Theta = N \cdot I = 4.000 \text{ A}$ , der Eisenrückschluss aus Baustahl St37 mit  $30 \times 30 \text{ mm}^2$  Querschnittsfläche, die Luftspalllänge  $\delta = 10 \text{ mm}$ .



**Abbildung 11: Magnetischer Kreis mit Luftspalt, Darstellung der Feldlinien (MAXWELL 2D)**

In der Abbildung 13 ist der Verlauf der magnetischen Induktion  $B$  über der  $x$ -Achse (horizontale Symmetrieachse, die durch die Mitte der Spule über den linken Eisenschenkel sowie durch den Luftspalt verläuft) dargestellt. Innerhalb des linken Eisenschenkels herrscht über eine Breite von 30 mm eine Induktion von knapp 1,1 T. Würde der magnetische Fluss perfekt durch das Eisen geführt und in einem parallelen Flussbündel durch den Arbeitspalt  $\delta$  verlaufen, so herrschten aufgrund der Flusserhaltung in einem 30 mm breiten Luftspalt ebenfalls knapp 1,1 T. Aus dem Diagramm ist jedoch zu entnehmen, dass es unmittelbar außerhalb des linken vertikalen Eisenschenkels - und nicht nur im Arbeitspalt - zu Rückflüssen kommt. Die Induktion in dem Luftspalt beträgt aufgrund dieser Streuverluste in dem dargestellten Aufbau knapp 0,5 T. Eine Integration der Induktion über die  $x$ -Achse ergibt in der Summe Null. Da diese Streueffekte sehr stark von der Geometrie des Magnetkreises und den nicht-linearen magnetischen Eigenschaften der Werkstoffe abhängen, lässt sich kein verlässlicher Verlustfaktor ermitteln, der diese Verluste in den analytischen Rechnungen berücksichtigen könnte. In diesem Zusammenhang wird die Bedeutung der numerischen Methoden ersichtlich, bei denen alle diese Einflüsse berücksichtigt werden.

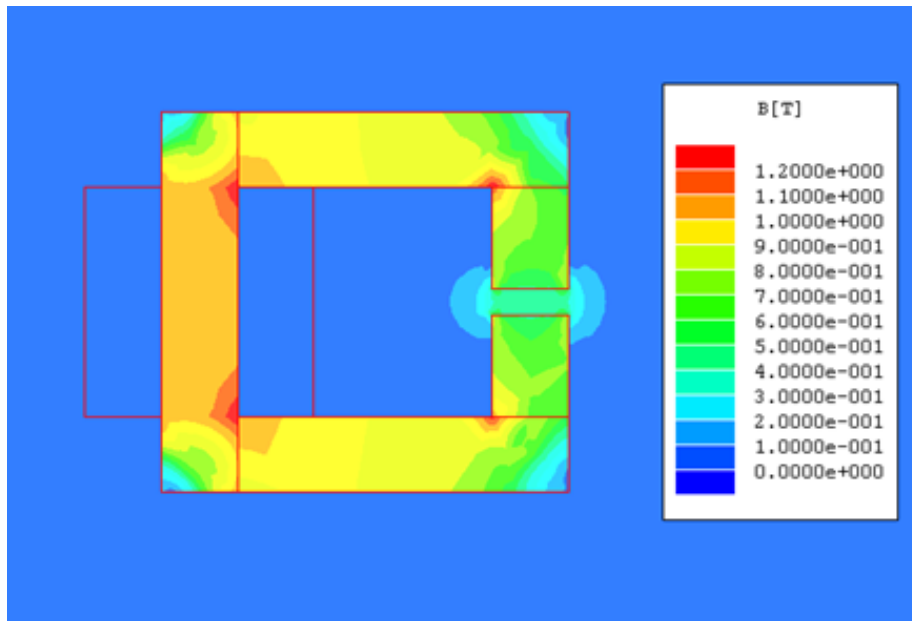


Abbildung 12: Darstellung der Induktion  $B$  im magnetischen Kreis mit Luftspalt

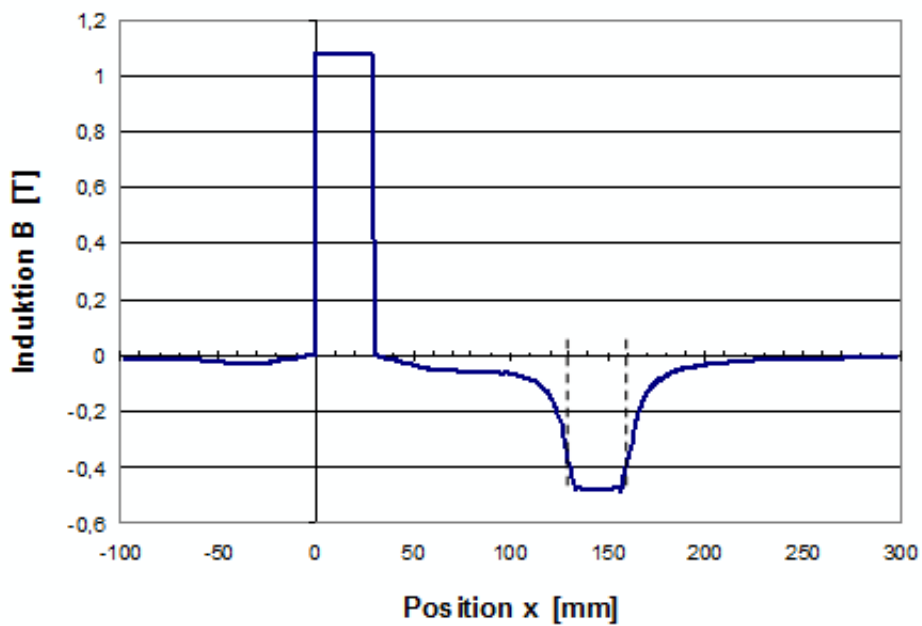


Abbildung 13: Darstellung des Verlaufs der Induktion  $B$  entlang der x-Achse im magnetischen Kreis mit Luftspalt (siehe Abbildung 12)

## 6.8 Ohm'sches Gesetz des Magnetismus

Zur einfacheren Berechnung von Magnetkreisen, die aus Spulen und Weicheisen bestehen, lässt sich das Ohm'sche Gesetz des Magnetismus nutzen. Es stellt eine Analogie zwischen elektromagnetischen und elektrischen Kreisen dar und lautet

$$\Theta = R_m \cdot \Phi \quad (6-18)$$

Die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten (P und Q) des Magnetkreises ist hierin definiert als

$$\Theta = \int_P^Q \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \quad (6-19)$$

Der magnetische Widerstand ist definiert als

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} \quad (6-20)$$

Das Pendant zum elektrischen Strom ist der magnetische Fluss  $\Phi$  nach (6-7). Das Gesetz ist eine Folge aus (6-4), (6-7) und der Definition (6-19). Tatsächlich hat es nichts mit einem Leitungsmechanismus zu tun, sondern vereinfacht lediglich die Berechnung magnetischer Kreise. Angewandt auf den Kreis in der Abbildung 10 würde es lauten:

$$NI = \Phi \cdot (R_{m,Fe} + R_{m,Luft}) = \Phi \cdot \left( \frac{1}{\mu_0 \mu_r A} + \frac{\delta}{\mu_0 A_{Luft}} \right) \quad (6-21)$$

Unter Verwendung von  $A_{Fe} = A_{Luft} = A$  sowie  $\Phi = B \cdot A$  ergibt sich hieraus selbstverständlich das gleiche Ergebnis wie in (6-16). Wegen (6-3) gilt auch die Knotenregel

$$\sum_i \Phi_i = 0 \quad (6-22)$$

und wegen (6-1) zusammen mit der Definition (6-19) auch die Maschenregel für  $\Theta$ . Damit sind alle Rechenverfahren zur Berechnung elektrischer Kreise auch auf magnetische Kreise anwendbar. Die Entsprechungen zwischen elektrischen und magnetischen Kreisen sind in der Tabelle 2 zusammengefasst.

| magnetische Größe       |                               | elektrisches Pendant    |   |
|-------------------------|-------------------------------|-------------------------|---|
| magnetische Spannung    | $\Theta = N \cdot I$          | elektrische Spannung    | U |
| magnetischer Fluss      | $\Phi = B \cdot A$            | elektrischer Strom      | I |
| magnetischer Widerstand | $R = \frac{1}{\mu_r \mu_0 A}$ | elektrischer Widerstand | R |

Tabelle 2: Analogie zwischen magnetischen und elektrischen Größen

## Beispiel 2: Kreis mit Permanentmagnet und Luftspalt

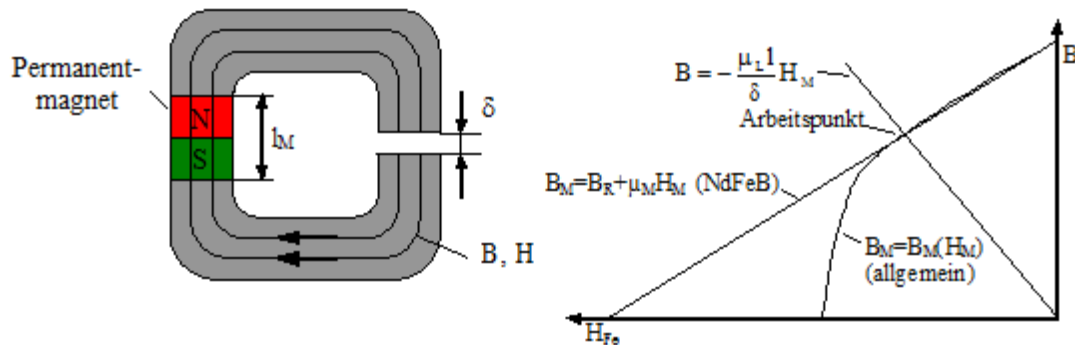


Abbildung 14: Permanentmagnetischer Kreis mit Luftspalt (links) und die graphische Ermittlung seines Arbeitspunktes im zweiten Quadranten der BH-Kennlinie eines Permanentmagneten (rechts)

Aus (6-11) folgt für den permanentmagnetischen Kreis nach der Abbildung 14

$$H_M l_M + H_{Fe} l_{Fe} + H_L l_L = 0 \quad (6-23)$$

Im Folgenden wird davon Gebrauch gemacht, dass der magnetische Widerstand von Eisen vernachlässigbar ist (siehe oben,  $\mu_{Fe} \gg \mu_L, \mu_M$ ). Damit verkürzt sich dies zu

$$H_M l_M + H_L l_L = 0 \quad (6-24)$$

Diese Gleichung kann nur dann erfüllt sein, wenn  $H_M$  und  $H_L$  entgegengesetzte Vorzeichen haben. Da im Luftspalt wegen (6-4)  $H_L$  parallel zu  $B_L$  verläuft und damit positiv ist und  $B$  wegen (6-7) überall im Kreis die gleiche Richtung hat, muss  $H_M$  in Permanentmagneten negativ sein. Damit befindet sich der Arbeitspunkt eines Permanentmagneten zwangsläufig im zweiten Quadranten der BH-Kurve, da nur hier  $B$  positiv und  $H$  negativ ist. Da der magnetische Fluss  $\Phi$  wegen (6-4) überall im Kreis, also auch im Luftspalt, den gleichen Wert haben muss, gilt  $\Phi = \Phi_M = \Phi_L = \text{konstant}$ . Da der Kreisquerschnitt  $A$  im gesamten Kreis konstant ist, folgt daraus wegen  $\Phi = B \cdot A$ ,  $B = B_M = B_L$ . Berücksichtigt man weiterhin, dass  $B = B_L = \mu_L \cdot H_L$ , so ergibt sich aus (6-24)

$$B = -\frac{\mu_L l}{\delta} H_M \quad (6-25)$$

Zusammen mit der BH-Kurve des Permanentmagneten  $B_M = B_M(H_M)$  ergibt sich ein Gleichungssystem, das sich nach  $B$  auflösen lässt. Da die BH-Kurve jedoch nichtlinear ist, muss diese Lösung numerisch oder, wie in der Abbildung 14 dargestellt, graphisch erfolgen. Befindet sich der Arbeitspunkt hinter dem Knick der BH-Kurve, so ist eine Reduktion der Remanenz und damit eine dauerhafte Schwächung des Permanentmagneten die Folge. Bei NdFeB-Magneten (Neodym-Eisen-Bor), verläuft die BH-Kurve im gesamten zweiten Quadranten näherungsweise linear, so dass man sie durch

$$B = B_R + \mu_M H_M \quad (6-26)$$

beschreiben kann. Löst man das Gleichungssystem (6-25), (6-26), so erhält man die Kreisinduktion.

$$B = B_R \frac{1}{1 + \frac{\mu_M \delta}{\mu_L l_M}} \quad (6-27)$$

Da  $\mu_M \approx \mu_L$ , wird diese Beziehung vom Verhältnis aus Luftspaltlänge und Magnetlänge  $\delta / l_M$  bestimmt. Ist der Luftspalt im Verhältnis zur Magnetlänge sehr klein, so herrscht im Kreis in etwa die Remanenzinduktion  $B_R$ . Sind Luftspalt- und Magnetlänge gleich, so herrscht etwa  $B_R/2$ . In der Abbildung 15 ist (6-24) als Funktion von  $\delta / l_M$  dargestellt.

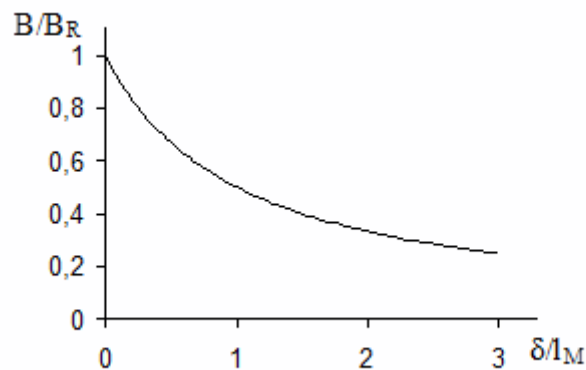


Abbildung 15: Magnetische Induktion  $B$  als Funktion des Verhältnisses aus Luftspaltlänge und Magnetlänge für einen permanentmagnetischen Kreis

## 6.9 Magnetkräfte

Es gibt zwei Arten von Kräften die durch Magnetfelder verursacht werden:

- Lorentzkraft
- Reluktanz- oder Maxwellkraft

Erstere wirkt auf bewegte Ladungen, während letztere auf dem Bestreben magnetischer Systeme beruht, die Gesamtfeldenergie zu reduzieren. An dieser Stelle soll nur auf die Reluktanzkraft eingegangen werden.

### 6.9.1 Reluktanzkräfte

Jedes physikalische System, dessen Energiegehalt  $W$  sich durch die mechanische Verschiebung einer Komponente reduzieren lässt, übt eine Kraft  $F$  auf diese Komponente in der entsprechenden Richtung aus:

$$\vec{F} = - \text{grad } W \quad (6-28)$$

In (6-28) liegt die Ursache für die Reluktanzkraft begründet. Da  $\mu$  in (6-9) im Nenner steht, verursacht ein durch Luft verlaufendes Magnetfeld viel höhere Energiedichten als ein durch

Eisen verlaufendes. Permanentmagnete haften deshalb an Weicheisen, weil dadurch das Volumen des durch Luft verlaufenden Felds und damit die Gesamtfeldenergie minimiert wird.

### Beispiel 3: Haltekraft eines Hufeisenmagneten

Für viele Systeme ist die Feldverteilung nicht analytisch berechenbar. Eine Ausnahme stellt die Haltekraft eines Hufeisenmagneten dar, siehe Abbildung 16.

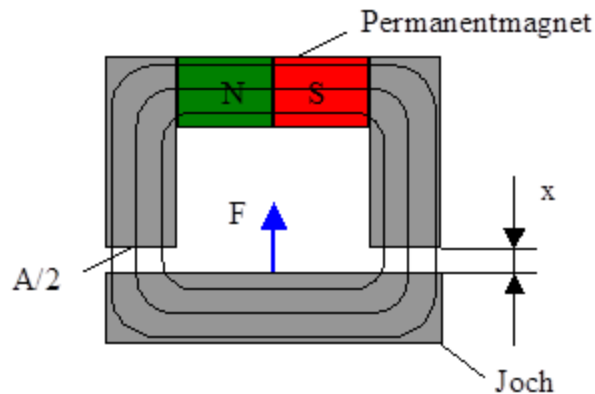


Abbildung 16: Haltekraft eines Hufeisenmagneten

Bei sehr kleinen Luftspalten  $x$  herrscht im Kreis näherungsweise die Remanenzinduktion des Permanentmagneten. Außerdem bleibt die Feldenergie im Eisen dann unabhängig von  $x$  konstant. Deshalb genügt es, nur die Feldenergie im Luftspalt zu betrachten. Diese ergibt sich nach (6-9) und (6-10) zu

$$W(x) = \int_V \frac{1}{2} \frac{B_R^2}{\mu_L} dV = \frac{1}{2} \frac{B_R^2}{\mu_L} Ax \quad (6-29)$$

mit der gesamten Berührfläche  $A$  zwischen Magnet und Joch (in der Abbildung 16 über zwei Teilflächen  $A/2$  verteilt). In diesem Fall wird aus der Vektorgleichung (6-28) eine skalare Gleichung. Dadurch wird aus dem Gradienten eine einfache Differentiation nach  $x$ . Für den Betrag von  $F$  gilt damit

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \frac{B_R^2}{\mu_L} Ax \right) = \frac{1}{2} \frac{B_R^2}{\mu_L} A \quad (6-30)$$

oder ausgedrückt durch den Fluss

$$F = \frac{1}{2} \frac{\Phi_R^2}{\mu_L A} \quad (6-31)$$

## 6.9.2 Maxwell'sche Zugkraftformel

Weiter oben erfolgte die Betrachtung der Feldenergie im Luftspalt. Sie wird letztlich durch den Austritt des  $B$ -Felds aus einem hochpermeablen Material in Luft verursacht. Deshalb müssen die Zusammenhänge (6-30), (6-31) ganz allgemein für jedes ungesättigte Weicheis-

enteil, aus dem Feldlinien austreten, gelten. Dieser Zusammenhang wird als Maxwell'sche Zugkraftformal bezeichnet.

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_L} A = \frac{1}{2} \frac{\Phi_R^2}{\mu_L A} \quad (6-32)$$

Hierin bezieht sich B auf die durch die Oberfläche A tretende Induktion. Gelingt es, die Feldverteilung um ein Weicheisenteil zu berechnen, so kann die Kraftwirkung mit Hilfe von (6-32) für die gesamte Oberfläche einer Komponente bilanziert und so die resultierende Reluktanzkraft berechnet werden. Diese Art der Kraftberechnungen ist in den entsprechenden numerischen Computerprogrammen zur Feldberechnung implementiert. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass mögliche Fehler einer rein analytischen Berechnung der Zugkraft bei der Bestimmung des magnetischen Flusses entstehen, da sich die Verluste durch Streuflüsse analytisch schwer quantifizieren lassen und die nichtlinearen Materialeigenschaften berücksichtigt werden müssen.

### 6.9.3 Horizontale Kraftwirkung der Reluktanzkraft

Abgesehen von der Magnetkraft als Normalkraft, kann die Verringerung der Reluktanz ebenso als tangentielle Kraft genutzt werden. In der Abbildung 17 ist der magnetische Kreis mit einem horizontal beweglichen Element dargestellt. Wenn sich das Element weiter nach rechts bewegt, wird der Luftspalt kleiner und damit der Weg des magnetischen Felds durch den Luftspalt kürzer.

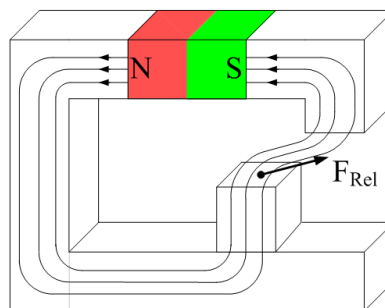


Abbildung 17 Reluktanzkraft - horizontal wirkend

Die entstehende Kraft ist nicht analytisch berechenbar. Mit Hilfe von geeigneten Modellrechnungen mit Finite Elemente Programmen (z.B. MAXWELL) können jedoch numerische Lösungen für die Wirkung der Reluktanzkraft ermittelt werden

## 6.9.4 Lorentzkraft

Bewegt sich ein Teilchen der Ladung  $q$  in einem Magnetfeld  $\vec{B}$  mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , so wird auf dieses Teilchen eine Kraft  $\vec{F}_L$  ausgeübt, wenn die Bewegungsrichtung  $\vec{v}$  senkrecht zur Richtung des magnetischen Felds  $\vec{B}$  ist.

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (6-33)$$

Zu beobachten ist die Lorentzkraft beispielsweise bei einer stromdurchflossenen Leiterschleife im Magnetfeld. Fließt durch den elektrischen Leiter ein Strom, so kommt es zur Bewegung von geladenen Teilchen (technische Stromrichtung). Steht die Leiterschleife senkrecht zum Magnetfeld, wirkt die Lorentzkraft. In der Abbildung 18 ist ein stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld abgebildet.

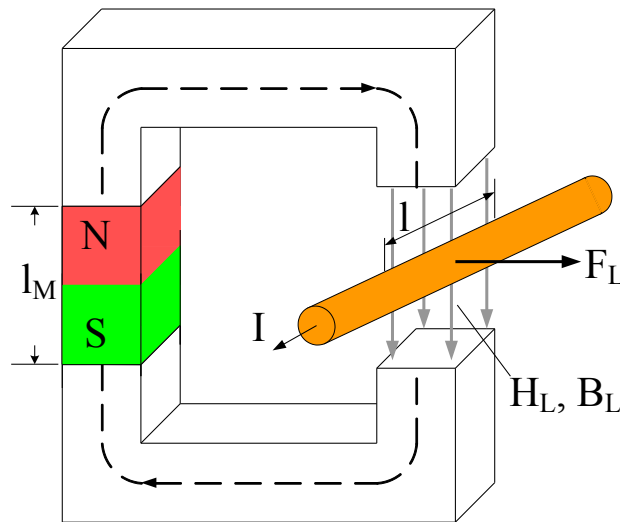


Abbildung 18 Stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld: Lorentzkraft

Die Lorentzkraft auf die Leiterschleife ist abhängig von der im Magnetfeld befindlichen Leiterlänge  $\vec{l}$ , der Stromstärke  $I$  und der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}_L$ .

$$\vec{F}_L = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}_L \quad (6-34)$$

Wie beschrieben, wirkt diese Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld, wenn Magnetfeld und Stromrichtung senkrecht zueinander wirken. Im Gegensatz dazu kann die Lorentzkraft auch auf einen beweglichen Magneten wirken, wenn der stromdurchflossene Leiter fest steht.